Ιδιότητες συνόλων μηδενικού περιεχομένου:

(1) Αν $B \subset A$ και A έχει μηδενικό μέτρο ή περιεχόμενο τότε το B έχει μηδενικό μέτρο ή περιεχόμενο

(2) Κάθε πεπερασμένη ένωση συνόλων μηδενικού περιεχομένου έχει μηδενικό περιεχόμενο

(3) Κάθε αριθμήσιμη ένωση συνόλων μηδενικού μέτρου έχει μηδενικό μέτρο.

(4) Κάθε σύνολο μηδενικού περιεχομένου έχει μηδενικό μέτρο

(5) Κάθε συμπαγές υποσύνολο μηδενικού μέτρου έχει μηδενικό περιεχόμενο.

(6) Κάθε κλειστό ορθογώνιο έχει μη μηδενικό περιεχόμενο και (ισοδύναμα αφού είναι συμπαγές) μη μηδενικό μέτρο.

Άρα, για να έχει ένα υποσύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^n$ μηδενικό περιεχόμενο ή μηδενικό μέτρο θα πρέπει να μην "χωράει" μέσα του κλειστού ορθογώνιο $A \subseteq \mathbb{R}^2$ (βλ. (1) και (6))

$\Rightarrow$ θα πρέπει να μην έχει n-διάστατο "περιεχόμενο" δηλ. να είναι ένα υποσύνολο "μικρότερης διάστασης"

Παράδειγμα:

(1) Ένα μονοσύνολο έχει μηδενικό περιεχόμενο

(2) Ένα υπερεπίπεδο στον $\mathbb{R}^n$ (πχ μια ευθεία στον $\mathbb{R}^2$ και ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$) έχει μηδενικό μέτρο, και ένα φραγμένο κομμάτι του μηδενικό περιεχόμενο

$\Rightarrow$ Το σύνορο ενός κλειστού ορθογωνίου (= ένωση υπερεπιπέδων) έχει μηδενικό περιεχόμενο.

Παρατήρηση:

Για το εάν ένα σύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^2$ έχει μηδενικό περιεχόμενο/μέτρο ή όχι παίζει σημαντικό ρόλο ποιας διάστασης μηδενικό περιεχόμενο/μέτρο εννοούμε: πχ το $[a, \beta] \subseteq \mathbb{R}$

δεν έχει μηδενικό περιεχόμενο | μετρο διάστασης 1, αφού δεν μπορούμε να το καλύψουμε με $[a_i, \beta_i] \subseteq \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\forall \varepsilon > 0$, $\sum_{i=1}^{k} V([a_i, \beta_i]) < \varepsilon$

Ενώ το $[a, \beta] \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ έχει μηδενικό περιεχ. | μετρο

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΤΑΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ (ολοκλήρωσης στον $\mathbb{R}^n$)

Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο και $f: A \to \mathbb{R}$ φραγμένη τότε f ολοκληρώσιμη $\Leftrightarrow$ f συνεχής (σχεδόν) παντού (Κρ. Lebesgue)

π.χ

Έστω συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & , x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & , x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \qquad (x,y) \in [0,1] \times [0,1] = A$$

Να εξεταστεί εαν είναι ολοκληρώσιμη

ΛΥΣΗ

Η f ολοκληρώσιμη αφού τα σημεία ασυνέχειας είναι τα σημεία $(\frac{1}{2}, y)$, $y \in [0, +\infty)$

δηλ. το σύνολο των σημείων ασυνέχειας είναι το $B = \{(\frac{1}{2}, y) : y \in [0,1]\}$ και το B έχει (διοδιάστατο) μηδενικό περιεχόμενο

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ / ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ: (Προταση 1)

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο και $f: A \to \mathbb{R}$ ολοκληρ. με $f(x) \geq 0$, $\forall x \in A$ και $f(x_0) > 0$, $x_0 \in A$ στο οποίο η f συνεχής. Τότε

$$\int_A f > 0$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 1

Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο και $f: A \to \mathbb{R}$ θετική, δηλ $f(x) > 0$ $\forall x \in A$ και ολοκληρώσιμη τότε $\int_A f > 0$