

## Ιδιότητες σωλήων μηδενικού περιεχομένου:

- (1) Αν  $BCA$  και  $A$  έχει μηδενικό μέτρο ή περιεχόμενο τότε το  $B$  έχει μηδενικό μέτρο ή περιεχόμενο
- (2) Κάθε πεπερασμένη ένωση σωλήων μηδενικού περιεχομένου έχει μηδενικό περιεχόμενο
- (3) Κάθε αριθμησίτη ένωση σωλήων μηδενικού μέτρου έχει μηδενικό μέτρο
- (4) Κάθε σωλήας μηδενικού περιεχομένου έχει μηδενικό μέτρο
- (5) Κάθε συμπαγές υποσύνολο μηδενικού μέτρου έχει μηδενικό περιεχόμενο.
- (6) Κάθε υλειστό ορθογώνιο έχει μη μηδενικό περιεχόμενο και (ισοδύναμα αφού είναι συμπαγές) μη μηδενικό μέτρο.

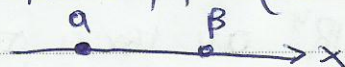
Άρα, για να έχει ένα υποσύνολο  $u \subseteq \mathbb{R}^n$  μηδενικό περιεχόμενο ή μηδενικό μέτρο θα πρέπει να μην "χωράει" μέσα του υλειστό ορθογώνιο  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  (βλ. (1) και (6))  
 $\Rightarrow$  θα πρέπει να μην έχει  $n$ -διαστάτο "περιεχόμενο"  
δηλ. να είναι ένα υποσύνολο "μικρότερης διαστάσεως"

## Παράδειγμα:

- (1) Ένα μονοσύνολο έχει μηδενικό περιεχόμενο
- (2) Ένα υπερεπιπέδο στον  $\mathbb{R}^2$  (πχ μια ευθεία στον  $\mathbb{R}^2$  και ένα επιπέδο στον  $\mathbb{R}^3$ ) έχει μηδενικό μέτρο, και ένα φραγμένο κομμάτι του μηδενικό περιεχόμενο  
 $\Rightarrow$  Το σωμα ενός υλειπού ορθογωνίου (= ένωση υπερεπιπέδων) έχει μηδενικό περιεχόμενο.

## Παρατήρηση:

Για το εάν ένα σωλήας  $u \subseteq \mathbb{R}^2$  έχει μηδενικό περιεχόμενο / μέτρο ή όχι παίζει σημαντικό ρόλο ποιας διαστάσεως μηδενικό περιεχόμενο / μέτρο έχουμε: πχ το  $[a, \beta] \subseteq \mathbb{R}$



δεν έχει μηδενικό περιεχόμενο / μετρο διάστασης 1, αφού  
 δεν μπορούμε να το καλύψουμε με  $[a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}$  έτσι  
 ώστε  $\forall \epsilon > 0, \sum_{i=1}^k V([a_i, b_i]) < \epsilon$   
 Ενώ το  $[a, b] \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$  έχει μηδενικό περιεχ. / μετρο

### ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΤΑΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ (ολοκλήρωσης στον $\mathbb{R}^n$ )

Έστω  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  κλειστό ορθογώνιο και  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  γραμμική  
 τότε  $f$  ολοκληρώσιμη  $\Leftrightarrow f$  συνεχής (σχεδόν) παντού  
 (κρ. Lebesgue)

Πλ

Έστω συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1, & x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] = A$$

Να εξεταστεί εάν είναι ολοκληρώσιμη

ΛΥΣΗ

Η  $f$  ολοκληρώσιμη αφού τα σημεία ασυνέχειας  
 είναι τα σημεία  $(\frac{1}{2}, y), y \in [0, 1]$

δηλ. το σύνολο των σημείων ασυνέχειας είναι το  
 $B = \{(\frac{1}{2}, y) : y \in [0, 1]\}$  και το  $B$  έχει (δυσδιάστατο)  
 μηδενικό περιεχόμενο

### ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ / ΕΝΔΕΙΞΕΙΣ (Προταση 1)

Έστω  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  κλειστό ορθογώνιο και  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  ολοκληρ.  
 με  $f(x) \geq 0, \forall x \in A$  και  $f(x_0) > 0, x_0 \in A$   
 στο οποίο  $\eta$   $f$  συνεχής. Τότε

$$\int_A f > 0$$

### ΠΡΟΤΙΜΑ 1

Έστω  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  κλειστό ορθογώνιο και  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$   
 θετική, δηλ  $f(x) > 0 \forall x \in A$  και ολοκληρώσιμη  
 τότε  $\int_A f > 0$